

# DT 10

Investigación preliminar

## Una comparación entre la fórmula de transformación de Marx y la de von Bortkiewicz desde una aproximación algebraica

Bruno Canuto y Joaquín Farina<sup>⊕</sup>



**MARXISMO CUANTITATIVO**  
CENTRO DE ESTUDIOS

Noviembre 2019

---

<sup>⊕</sup> Orden Alfabético

# Una comparación entre la fórmula de transformación de Marx y la de von Bortkiewicz desde una aproximación algebraica

Bruno Canuto y Joaquín Farina\*

## Resumen

En este artículo comparamos, desde un punto de vista del algebra lineal, la fórmula de transformación de los valores en precios de producción de Marx con la de von Bortkiewicz. En particular demostramos tres aspectos: (1) la fórmula de von Bortkiewicz está basada sobre la hipótesis de linealidad (1.20); (2) su generalización para  $m \geq 4$  esferas de producción necesita, siguiendo el enfoque de Morishima (1973 y 1974), la introducción de los coeficientes tecnológicos y (3) en la correspondiente matriz de transformación no se puede aplicar el teorema de Perron y Frobenius en general. La fórmula de Marx en el caso de evolución en tiempo discreto es tratada brevemente en la sección 1 del presente artículo.

## Introducción<sup>1</sup>

En Yaffe (1976) se hace referencia al problema de la transformación valores a precios como la "corrección" que más frecuentemente se le hace a *El Capital*. La versión convencional de estas correcciones comenzó con los influyentes libros de Mikhael Tugan-Baranowsky<sup>2</sup>, "Studien zur Theorie und Geschichte der Handelskrisen in England", de 1901, y en particular con "Los Fundamentos Teóricos del Marxismo", publicado en 1905 (1915 en España). Un ejemplo aritmético presentado en este último, donde se establecen ya todos los aspectos conceptuales de esa visión, fue poco tiempo después reformulado en términos algebraicos por Ladislaus von Bortkiewicz<sup>3</sup> en 1907 hasta la actualidad pasando por autores tan disimiles que incluyen a Samuelson y a Sweezy. Luego de la publicación de del libro de Sweezy "Teoría del Desarrollo

---

\* **Bruno Canuto** es Matemático, Investigador del CONICET e Investigador asistente del Proyectos UBACyT "Economía Política y Marxismo Cuantitativo. Análisis económico-social desde la obtención de variables marxistas. Aspectos de los ciclos y de la inestabilidad de la acumulación capitalista."

DIRECTOR: **Joaquín Farina** es Dr. en Economía y Empresa UCLM (España), Mg en Economía Internacional y Relaciones Laborales UCLM (España) y Lic. en Economía FCE-UBA (Argentina). Profesor Adjunto de Macroeconomía y Política Económica FCE-UBA y Adjunto Regular de Economía CBC-UBA. Docente regular en la FCS-UBA.; Director del Proyectos UBACyT "Economía Política y Marxismo Cuantitativo. Análisis económico-social desde la obtención de variables marxistas. Aspectos de los ciclos y de la inestabilidad de la acumulación capitalista." Además, es director del CEMC-FCE-UBA (Centro de Estudios de Marxismo Cuantitativo). joaquin\_farina@hotmail.com

<sup>1</sup> Parte de esta introducción proviene de la tesis doctoral de Joaquín Farina (2018) y del DT 8 de esta serie (2019).

<sup>2</sup> Tugan-Baranowsky era un economista ucraniano, muy activo en la recepción inicial de la obra de Marx. Su libro sobre las crisis tuvo una primera edición en 1894 en ruso, pero es la versión de 1901, publicada en alemán, la más destacable en este sentido. El trabajo de 1905 culmina sus esfuerzos críticos de la obra de Marx, estableciendo una interpretación de los aspectos cuantitativos básicos de la teoría del valor que involucra tanto una interpretación acerca de la forma de calcular la tasa de ganancia como de la naturaleza del "problema de la transformación".

<sup>3</sup> Ladislaus von Bortkiewicz era un estadístico y economista ruso de origen polaco que ejercía en Berlín que se enrolaba entre los Ricardianos. Su esfuerzo se centraba en defender a Ricardo de las críticas de Marx.

Capitalista” en 1942, el problema fue tratado por una gran cantidad de autores incluyendo al mencionado Samuelson.

Los economistas marxistas y no marxistas ortodoxos y heterodoxos han sentido un impulso de corregir, mejorar o incluso refutar a Marx sobre todo en lo concerniente al problema de la transformación. Un último giro, más reciente, en el tratamiento de la transformación lo están dando algunos autores que buscan incorporar a la discusión aspectos dinámicos del problema, así como reflexiones acerca de la teoría del dinero de Marx (Ramos 2003 y 2007). Con respecto al primer punto, es interesante anotar que podría entenderse que esa era la intención trunca de Marx ya que él se encontraba estudiando ecuaciones diferenciales (matemática de punta en su época) al momento de morir. Smolinski (1973: 1192-1199) lo consideró pionero a Marx en su estudio para la interpretación económica y que transitó con mayor intensidad el estudio del cálculo diferencial entre 1878 y 1883 (año de su muerte). El mismo autor destaca que varias problemáticas y modelos planteados por Marx resultan adecuados para el tratamiento desde sistemas de ecuaciones diferenciales, lo que explica la motivación de Marx a dedicarse a su estudio. Por ejemplo, cita los trabajos de Boiarkii y de Lange en torno al modelo marxista de crecimiento económico.

Entrando en el propio problema de la transformación de valores a precios, el esquema de la "corrección" de Tugan y Bortkiewicz llevada a los angloparlantes por parte de Sweezy al finalizar la segunda guerra mundial llevo a una serie posterior modelos que abordan la transformación de manera casi inalterable, más allá de algunas variaciones. Este debate fue reavivado cuando Piero Sraffa, publica *Producción de mercancías por medio de mercancías* en 1960. Si bien esta obra no aborda el problema directamente, un conjunto de discípulos de Sraffa utilizan sus hallazgos metodológicos para reconsiderar la cuestión.

Las soluciones de corte Ricardiano (donde entran precisamente los enfoques fundacionales de Tugan y Bortkiewicz), sostiene Yaffe (1976), adolecen de la incomprensión del método de Marx, en especial de sus categorías valor y precio. Los aspectos críticos de la obra de Marx respecto a Ricardo quedan muy minimizados; por ejemplo, la elaboración de la dualidad del trabajo<sup>4</sup> (la otra cara de la moneda de la dualidad de la mercancía) como trabajo concreto y trabajo abstracto, y la conexión de esto con la teoría del dinero. Esto genera una lectura de Marx desde un punto de vista “naturalista” o “técnico” en la cual hay poco espacio para un desarrollo más profundo del análisis marxista de las relaciones sociales (entre otros, su notable reflexión acerca del “fetichismo de la mercancía”). Refiriéndose a estas lecturas Ricardianas modernas Yaffe afirma que:

La sustancia del valor -trabajo humano abstracto- se sustituye por su magnitud, unidades de tiempo de trabajo, y el capital se reduce simplemente a insumos de tiempo de trabajo fechados. Las relaciones sociales, [...], es un hecho "dado" empíricamente o una explicación aceptable -matemática y, presumiblemente, sociológicamente- de los beneficios positivos. Está dada una vez que la cesta de mercancías que forman el salario pagado a los trabajadores (en unidades del tiempo de trabajo incorporado, por supuesto) y el ingreso total se conocen. Un proceso social se sustituye por coeficientes técnicos y las relaciones sociales por la distribución de la producción entre las clases sociales.

Por otra parte, puede argumentarse que este enfoque descarta expeditivamente los elementos dialécticos de la obra de Marx y su propósito de estudiar leyes de movimiento (dinámicas) del capitalismo, en las cuales habría un amplio espacio para episodios de crisis e inestabilidad que están postulados en su obra. En cambio, como es natural, mucho del instrumental ricardiano

---

<sup>4</sup> Para Marx (2008: 51) la incomprensión de la dualidad del trabajo es el eje en torno al cual gira la incomprensión de la economía política por parte de los clásicos.

moderno hereda puntos de vista con fuertes componentes de una visión del capitalismo "clásica", en la cual los factores de inestabilidad del sistema son muy limitados, o directamente ignorados. Por ejemplo, en Ricardo, los episodios de crisis en el capitalismo suelen atribuirse esencialmente a "barreras técnicas" (por ejemplo, por la baja productividad de la agricultura) y a las consecuentes disputas distributivas (creadas en torno a la renta y el salario), o a factores complementarios ajenos al sistema (una guerra) que pueden provocar perturbaciones transitorias en la relación de oferta y demanda. Ciertamente, la incorporación del conflicto distributivo emparenta la literatura de estos autores Ricardianos modernos con la obra de Marx, pero no necesariamente agota las hipótesis de *El Capital* acerca del tipo de trayectoria del sistema capitalista, en particular en lo referente a posibles factores endógenos de inestabilidad, por ejemplo, relacionados con la dinámica de innovación tecnológica, o del desarrollo de una esfera financiera, en la cual no necesariamente se genera una tendencia espontánea al equilibrio. Estos temas, implícita o explícitamente tratados por Marx hacen parte de una visión más compleja del capitalismo que la volcada en el instrumental formal generado a partir del restringido problema de la transformación tal y como fue concebido por Tugan y Bortkiewicz.

Otro punto que relevar es que a partir de las versiones Ricardianas de la teoría del valor de Marx se hace muy difícil una comprensión cabal del primer capítulo de *El Capital* y, por consiguiente, se pierde una llave fundamental para la comprensión plena del resto de la obra. Esta incompreensión lleva a una reacción en cadena que involucra lecturas al menos discutibles sobre otros puntos tales como la ley tendencial decreciente de la tasa de ganancia (también abordada por Tugan-Baranowsky), la distinción entre trabajo productivo e improductivo, etc.

Adicionalmente, puede destacarse que esa visión "clásica" y su reflejo en un instrumental formal muy centrado en una noción estática del equilibrio, deja un espacio muy reducido para elaborar la teoría del dinero en el capitalismo, es decir, en todas sus funciones, no limitándose a la unidad de medida (el "numerario" de los modelos ricardianos). En el núcleo de la teoría clásica (en especial la de Ricardo y sus seguidores) el dinero es esencialmente concebido como el famoso "velo" de las operaciones "reales" de la economía. Es difícil, por ejemplo, asimilar el análisis de Marx en el capítulo 3 del tomo I de *El Capital* a una noción de esta naturaleza. Lo que lleva según los dichos de Yaffe (1976) no "correcciones" sino al rechazo liso y llano de la teoría de Marx y su trabajo científico. Haciendo su presentación una nueva escuela, según sus dichos, reformista.

Abordaremos aquí lo esencial de la visión convencional del "problema de la transformación" tal y como se ha heredado del trabajo de los autores mencionados.

### **A) Relación entre valor y precio en el "problema de la transformación".**

Para entender el problema de la transformación resulta fundamental entender las categorías valor y precio en Marx. En principio Marx asume que las mercancías se venden a sus valores. Durante el primero y segundo volumen de *El Capital* esto, en principio, no ofrece dificultades ya que no hay distinciones en cuanto a la composición de los capitales. Cuando se complejiza el nivel abstracción diferenciando los capitales y poniendo de relieve la competencia entre capitalistas tienen que diferenciarse las categorías valor y precio.

El aparente conflicto entre la tasa media de ganancia (o tasa general de ganancia) para capitales de igual magnitud y la "ley del Valor" surge cuando se introducen no sólo la composición orgánica del capital sino la diferenciación entre capital fijo y capital circulante, la diferenciación entre capital constante y variable, así como finalmente las diferentes velocidades de rotación<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> Un punto interesante para investigar en la obra de Marx es su incipiente tratamiento del efecto que tienen los tiempos diferenciados de rotación de los capitales. Esto implica el abandono de un supuesto de

(formulación que de conjunto explica más fenómenos que la famosa TIR de Irving Fisher). Ricardo concibe estas diferenciaciones como excepciones a la "ley del valor", lo que le vale las críticas de Marx sobre lo forzada de su abstracción que ignora la competencia.

En términos formales la presentación que hace Marx en el borrador del Manuscrito Principal del Tomo III de *El Capital* (sobre la cual ha girado el debate) consiste en un ejemplo aritmético con cinco esferas diferentes de la producción. Cada una de ellas con una composición orgánica diferente y la misma tasa de explotación. Así capitales iguales cuantitativamente ponen en funcionamiento cantidades diferentes de trabajo dada la cualitativamente diferente composición orgánica, produciendo así cantidades diferentes de plusvalor y exhibiendo tasas de ganancia inicialmente diferentes. Pero esas tasas de ganancia deberían igualarse en la medida en que se suponga, como lo hace Ricardo, un accionar de la competencia y un movimiento irrestricto de los capitales entre las ramas (algo que Marx acepta en su ejercicio) desde las esferas de baja tasa de ganancia hacia las de alta tasa de ganancia. Al producirse esta igualación los valores se transforman en lo que Marx denomina precios de producción. Es interesante mencionar que Marx (1963) en el Tomo III aclara que la formación de los precios de producción y este movimiento de capital no debe confundirse con el movimiento real del capital en busca de mayores ganancias una vez que la tasa general de ganancia se ha formado.

Para Marx el *precio de producción* corresponde al "precio de costo" de una mercancía más una proporción que permitiría que cada capital obtenga una ganancia media. Lo denomina precio ya que representaría una mejor aproximación que el valor a los precios de mercado. Según Marx, la ganancia total (la masa total de plusvalor) no puede verse alterado durante la transformación; lo que si se verá alterada por la transformación es su distribución entre capitalistas. Así tenemos que el ejemplo de Marx:

$$\sum V = \sum P_p \quad \text{y} \quad PV = G$$

Vale subrayar que aquí nos encontramos en una etapa intermedia del análisis de la relación entre valores y precios en Marx ya que el precio de producción, si bien un eslabón necesario, no constituye el precio a secas (esta afirmación constituiría en un error metodológico que al menos debería ser salvado). Es así como los precios empíricos fluctúan alrededor de los precios de producción.

## **B) Las "correcciones"**

i) La primera corrección que mencionamos fue la de Tugan-Baranowsky y Bortkiewicz retomada por Sweezy quien la difundió en el mundo de habla inglesa por ello Yaffe (1976) la denomina Bortkiewicz / Sweezy (olvidando a Tugan-Baranowsky). En la difundida versión de Sweezy (y posteriormente otros marxistas) el análisis se plantea a partir de la reproducción simple (Tomo II de *El Capital*) donde los capitales se expresan en valor y los productos en precios. a su vez a la hora de relacionar los capitales dividen los capitales en productores de medios de producción, de consumo de los asalariados y bienes de consumo de los capitalistas (estos dos últimos bienes salarios y de lujo respectivamente) con diferentes composiciones orgánicas. Este

---

la literatura donde es usual asumir un tiempo de rotación igual para todos los capitales ("un año") o bien trabajar con modelos en los cuales el capital queda reducido a flujos instantáneos donde se consideran solo trayectorias convergentes hacia equilibrios estacionarios.

esquema usa Sweezy para mostrar que, usando el método de la transformación en el caso de la reproducción simple, no se cumplirían las condiciones de equilibrio postuladas, con lo cual ese método de Marx sería coherente. En consecuencia, basado específicamente en el trabajo de Bortkiewicz, plantea una alternativa de solución que consta de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, previa transformación de los insumos a precios. Para que la solución sea única se incorpora una cuarta ecuación: precio=valor en los bienes de lujo (caso específico del oro).

Este procedimiento sigue el recurso de Bortkiewicz de establecer una condición de normalización (que posteriormente se denominó el postulado de invariancia), los cuales están indeterminados en un grado, es decir, sirven para determinar las relaciones relativas, pero no el factor de escala de cada uno, por ejemplo, las unidades en que se miden los precios o los valores. El postulado de invariancia consiste en postular condiciones de normalización de ambos sistemas que respeten alguna igualdad entre ambos; por ejemplo, la igualdad entre el total de los valores y el total de los precios de producción. O bien, como establece Bortkiewicz originalmente en su postulado de invariancia que en ambos sistemas se utilizará el oro como medida. Dado que, en su ejemplo, se parte de la reproducción simple y todo el producto excedente es oro, resulta que se cumple la igualdad entre el total del plusvalor y el total de la ganancia. En el sector 3 (oro) de ambos esquemas (valores y precios) se registra el mismo nivel de producción que a su vez equivale con el total de plusvalor producido y de ganancia distribuida.

Dentro de este marco interpretativo, Bortkiewicz y los autores que le siguieron, demuestran que no se podrían cumplir las dos igualdades que postula Marx. De hecho, con múltiples condiciones de normalización, no tiene por qué cumplirse ninguna de esas igualdades; el que se cumpla alguna es producto de una elección arbitraria en la solución completa de los sistemas simultáneos. En la versión original de Tugan, de hecho, este autor expresa los valores en términos de tiempo de trabajo y los precios de producción en unidades monetarias.

Según Yaffe (1976), la versión del problema de Bertkiewicz-Sweezy contradice lo esencial de la argumentación de Marx, enumerando dos errores en esta crítica. El primero la incomprensión de la naturaleza del dinero y también considerar al dinero y a los bienes de lujo como algo indiferenciado<sup>6</sup>. El segundo error (que sería propio de los esquemas Ricardianos) es que los cambios en la estructura del departamento de producción de bienes de lujo (o no básicos) no afectan la tasa media de ganancia. No ampliaremos aquí sobre estos aspectos.

ii) Winternitz rechaza la condición de normalización de Sweezy y elige otra: iguala valores y precios totales, ya que sostiene que es arbitraria la igualación exclusivamente en bienes de lujo que se hace en esa otra versión. Pero como ya se veía en el trabajo de Bortkiewicz, esto implica que no se cumpliría otra igualdad de Marx: el plusvalor total no resulta igual a la ganancia total. El autor de este método considera que es aplicable no sólo a la reproducción simple sino también a la ampliada donde se verán alteradas las tasas de acumulación entre departamentos.

iii) Yaffe (1976) analiza el método de Meek que mantiene es esquema de los tres sectores, pero, a diferencia de los anteriores, decide mantener inalterable la relación entre producto bruto y salarios. También iguala plusvalía total con ganancia total. Estas igualdades sólo son válidas si la composición orgánica del capital del sector de bienes salario es equivalente a la media social. El problema es que la suma de los precios no le resulta igual a la suma de valores.

---

<sup>6</sup> "La mercancía dinero como medida del valor no tiene precio" dice Yaffe a la vez que "la categoría dinero se desarrolla bajo el supuesto de que todas las mercancías se venden a sus valores". En un momento Sweezy sostiene que "el precio del oro será mayor que su valor debido a su composición orgánica del capital relativamente alta" y cae toda la estantería argumental por la incomprensión acabada de las categorías valor de cambio y dinero de Marx.

iv) Seton comenzó a aplicar el instrumental un poco más sofisticado del álgebra lineal, conduciendo estas discusiones al campo más amplio de la literatura sobre el modelo de insumo-producto y de los aportes que se harían posteriormente a raíz de la publicación del mencionado libro de Sraffa. Así encontró la solución de Meek pero para  $n$  sectores.

v) Centrándose en los motivos por los que se decide fijar unas variables y no otras Laibman fija a la tasa de explotación. Ya que esta depende de la relación de fuerzas en la lucha de clases y no de la transformación. Sin embargo, como sucede dentro del marco de esta interpretación, el aporte no permite obtener las igualdades "de Marx": valor total con precio total y plusvalía total con ganancia total.

vi) Medio y otros autores intentaron utilizar la obra de Piero Sraffa (que produjo un cambio muy importante) con el fin de dar resolución al problema planteado de la transformación. El ingenioso intento de Medio consiste en excluir el último elemento de indeterminación en el problema planteado por Tugan y Bortkiewicz, eligiendo para ello una mercancía (o un conjunto de mercancías) cuyo precio coincide con el valor. Esto se inspira claramente en el concepto sraffiano de mercancía estándar. Generando el sistema estándar de ecuaciones donde se las toma según las proporciones en que contribuyen a la producción del producto estándar. Si los salarios se expresan en función del producto estándar, se cumplen las igualdades del ejemplo de Marx. El problema es que la mercancía estándar que propone Medio se determina con los niveles medios de capital constante y capital variable. Por eso Yaffe (1976), crítico de este enfoque, dice: "[...] este es el punto clave, a menos que el sistema real (la economía) se encuentre en las proporciones estándar, este *numéraire* no tiene más relevancia que cualquiera de las otras construcciones artificiales [...]. Es sólo otra mercancía-medida de valor. El valor de las mercancías, sin embargo, ya tiene una unidad de medida inherente -el precio en dinero.". Así, Medio también caería en un problema respecto a la naturaleza del dinero en la economía capitalista y en la propia teoría de Marx.

vii) También inspirado en Sraffa el planteo de Steedman, siguiendo los lineamientos centrales de este debate, tal y como fue planteado desde Tugan y Bortkiewicz, enfatiza el punto de que la determinación de los precios de producción puede ser llevada a cabo con total prescindencia del "sistema de valores", la cual resultaría por tanto una construcción "redundante". Con solo disponer de las "condiciones técnicas" (plasmadas en matriz de coeficientes de insumo) y el salario, resulta posible determinar los "precios de producción"; además estas serían las únicas magnitudes realmente relevantes para los capitalistas. Con su "teoría del valor trabajo", Marx estaría dando un rodeo de tintes metafísicos, totalmente innecesario para determinar lo único que de verdad importaría en la economía capitalista, los precios estacionarios de equilibrio.

Ciertamente, también es posible determinar a partir del "sistema de valores", con los mismos datos técnicos y, con ello, la magnitud del "plusvalor"<sup>7</sup>. Pero en ese otro sistema simultáneo de valores nos encontramos, de nuevo, con que las tasas de ganancia resultan diferentes y por tanto resulta inútil para explicar la tendencia a su igualación, postulada por Ricardo y por Marx en su borrador de El Capital. Tendríamos entonces que en el "cálculo del valor" que hace Steedman, que resulta similar al de Bortkiewicz pero sin capital fijo ya que los medios de producción se consumen en un período, se llega aparentemente al mismo punto que Marx. Pero, como se mencionó, este autor destaca que en su modelo un esquema de valor puede obtenerse a partir de las cantidades físicas.

El análisis de Steedman no se limita a esto. "[...] sostiene que la solución de Marx es incoherente, ya que transformó los valores del producto en precios de producción, pero no transformó el

---

<sup>7</sup> Como dice Astarita (2011) "[...] conociendo el salario real y las condiciones físicas de producción puede determinarse la plusvalía."

valor de los insumos (esto es, del capital constante y del capital variable) en precios de producción." Este punto no hace más que enfatizar uno de los aspectos del debate tal y como lo planteó el artículo clásico de Bortkiewicz y ya había sido planteado por Tugan en 1901.

Un aspecto adicional que proviene del trabajo de Bortkiewicz en su reformulación algebraica del cálculo que había hecho Tugan, es su argumento en torno a los aspectos textuales del problema tal y como aparece en el pasaje del capítulo 9 del Tomo III de *El Capital*. Él describe la presentación de Marx como "incompleta", porque en su ejemplo no había llevado a cabo el procedimiento hasta el final. Según Bortkiewicz (1974<sup>8</sup>: 193) al presentar su versión de uno de los ejemplos de Marx sostiene que la solución "no se puede aceptar como válida porque excluyen de la conversión de los valores en precios [de producción] los capitales constante y variable, mientras que en cambio el principio de la tasa igual de ganancia debe implicar también esos elementos."<sup>9</sup>

Ahora bien, elaborando sobre este punto, Steedman, sostiene que, como consecuencia de esa "incompletitud", los bienes de consumo y de producción parecieran tener valores distintos cuando se venden como productos con respecto a cuándo se compran como insumos. "Lo cual no tiene sentido, apunta Steedman, ya que la venta y la compra son dos aspectos de la misma transacción. Adicionalmente, continúa, la solución de Marx flaquea por otra razón ya que, también siguiendo a Bortkiewicz en esto, Marx habría determinado la tasa de ganancia para la economía de conjunto en el "sistema de valores" con la fórmula  $PV/(K_c+K_v)$ . Pero Marx sostiene que la tasa de ganancia es un concepto que se utiliza para analizar la economía capitalista a nivel de los precios, no al nivel de los valores. Por lo tanto, esa magnitud debería calcularse utilizando los precios de producción, no los precios proporcionales a los valores. En otras palabras,  $PV/(K_c+K_v)$  no es la tasa de beneficio en la sociedad capitalista." (Astarita 2011).

El problema es que en este esquema los diferentes sectores arrojarán tasas de ganancia diferentes, que tanto Ricardo como Marx sabían que tendían a igualarse. Marx lo había solucionado explicando que las ramas de producción más productivas (mayor composición orgánica del capital) venden por encima de su valor y las menos productivas por debajo. Habiendo una transferencia de plusvalía de las ramas menos productivas a las más productivas.

viii) Pasinetti siguiendo el análisis anterior e intentado conciliar las posturas sraffianas y marxistas sostiene que el excedente puede calcularse en bienes y, por lo tanto, si hay un excedente en bienes y este es apropiado por un grupo de la sociedad diferente al de los productores, existe explotación. En esta línea, la explotación no requiere de la vigencia de la "teoría del valor trabajo". Cabe notar que el propio Sraffa en la introducción que escribe para el libro de Ricardo "Principios de Economía Política y Tributación" parece reconocer que, para calcular el excedente, Ricardo tenía en mente la necesidad de determinar los valores.

Si esto es así, podríamos afirmar que Pasinetti (y otros autores de la misma línea) tienen más bien un sesgo teórico pre-ricardiano, posiblemente "fisiócrata". El propósito de estos autores de reducir la economía capitalista a su aspecto de valores de uso es la que sustenta la difundida visión del enfoque de cantidades físicas (*physical quantities approach*). No cabe aquí entrar en aspectos adicionales de este enfoque, como las posibilidades que tiene para contemplar aspectos clave de la dinámica capitalista observada, tales como el cambio técnico y la misma naturaleza monetaria de la economía. La excesiva focalización de estos autores en modelos de tipo estático, con enfoques dinámicos extremadamente simplificados, como la estática

---

<sup>8</sup> La obra se publicó en su idioma original en el año 1907.

<sup>9</sup> Puede mencionarse que el punto de vista según el cual Marx habría "dejado los insumos sin transformar" es altamente dependiente de la lectura que se hizo de la edición engelsiana del borrador de Marx. Con posterioridad a la publicación del Manuscrito Principal del Tomo III de *El Capital*, este punto ha sido explorado por Ramos A. (1998-99: 55-81).

comparativa, parecieran limitantes a considerar en relación con su proyecto de subsumir el conjunto de hipótesis de Marx a este enfoque. De hecho, estas dificultades están relacionadas con un problema más general: la cuestión de incorporar la dimensión temporal de la economía en el contexto de desarrollos más realistas que no supongan producción instantánea. En particular, parecen esfuerzos muy acotados en los que se trabaja esencialmente modelos de flujo instantáneo y en los cuales se postula en general trayectorias estables de la economía capitalista. En este sentido hay que plantear una línea de investigación en la cual algunos de los aportes de Marx podrían resultar interesantes como punto de partida.

ix) Independientemente Shaikh y Morishima (menos claramente y más pobre de contenido) elaboraron una variante del problema planteado, en particular, proponiendo un método de cálculo de los precios de producción (ya obtenidos por Bortkiewicz) de tipo "iterativo". Aunque este método produce una trayectoria convergente hacia los precios de producción y la tasa de ganancia obtenidos mediante las técnicas estándar del álgebra lineal para resolver sistemas de ecuaciones simultáneas, se trataría de un antecedente interesante en la búsqueda de enfoques dinámicos de este problema.

Como hemos visto, de acuerdo con esta visión convencional creada por Tugan y Bortkiewicz a inicios de siglo XX, no existe una solución general para las ecuaciones que preserve simultáneamente la igualdad de valor total y el precio total, y la plusvalía total y la ganancia total, en el caso de que los insumos se transforman en precios de producción. Este resultado ha sido muy útil para que muchos autores descarten la obra de Marx como un proyecto esencialmente viciado por incoherencias internas. Sin embargo, el enfoque metodológico que ha dominado en la discusión podría no ser completamente representativo de los propósitos más generales de Marx en su búsqueda de las "leyes de movimiento" de la sociedad capitalista.

Cabe destacar que, a excepción de la última, todas las soluciones parten de evaluar los insumos a precios de producción y/o eligen una unidad de cuenta de forma artificial. A su vez las identidades planteadas por Marx ( $\Sigma V = \Sigma PP$  y  $PV = G$ ) no se mantendrán simultáneamente. Esta igualación de los insumos a precios es lo que Alejandro Ramos llama una estática "tras cosecha" ya que se supone que valores de productos e insumos son determinados en el mismo momento.

Yaffe sugiere que no hay una verdadera solución al problema de la transformación. Al menos no en el sentido que le quieren dar los críticos de Marx al tiempo en que mantenga la intención original de Marx. En consecuencia, el método de Marx para transformar valores a precios es el único correcto y la problemática planteada tal vez encuentre la solución en términos marxistas cuando se analice en forma dinámica como plantea Alejandro Ramos e intentamos dar un puntapié inicial en este documento.

En este artículo analizamos desde el punto de vista del álgebra lineal la fórmula de transformación de Marx (1963: 117-194) de los valores en precios de producción, y la crítica que de esta hace von Bortkiewicz (1907), algunos años después. Empezamos en esta misma introducción sintetizando un compilado de los debates en torno a la transformación de valores a precios en el que el *round* Marx-von Bortkiewicz es sólo un episodio. En el siguiente punto se desarrollará el problema de la transformación en el marco de la teoría del valor de Marx. Continuaremos con el desarrollo, lo más básico posible para la comprensión de este artículo, de la teoría del valor de Marx. Continuamos recordando brevemente el proceso de producción en sí mismo para un capital singular, analizado por Marx en el Tomo I de *El Capital*.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la presente sección, como vimos, se ha desarrollado un estado del arte que oficia de introducción, en la siguiente sección, #1, formalizamos la teoría del valor combinándola con la anticipación de los principales resultados

obtenidos en nuestro desarrollo, luego, en la sección #2, damos una breve introducción a la teoría del valor en Marx. En la sección #3 calculamos los coeficientes de transformación, para las fórmulas de Marx y la de von Bortkiewicz, respectivamente. En la sección #4 probamos que la fórmula de transformación de Marx conserva el valor, es decir que el valor de la producción total del capital social es igual al precio de producción total del mismo (y, como subproducto, que la plusvalía total es igual a la ganancia total), contrariamente a la fórmula de transformación de von Bortkiewicz (1907) donde, en general, solo se conserva una de las dos cantidades, o el valor total, o la plusvalía total. Probamos que ambas cantidades se conservan solo bajo algunas condiciones impuestas a  $c_i$  y a  $v_i$ . En fin, en la sección #5 analizamos la fórmula de transformación de Morishima (1973 y 1974) para  $m \geq 4$  esferas de producción.

### Formalización de la teoría del valor de Marx y resultados principales de nuestro desarrollo

Para Marx (2008: 47) "Un valor de uso o un bien, por ende, sólo tiene valor porque en él está objetivado o materializado trabajo abstractamente humano". En particular la magnitud de valor  $W^{10}$  de un valor de uso  $C$  es la cantidad de tiempo de trabajo socialmente necesario para su producción. En lo que sigue todas las magnitudes económicas están definidas por unidad de  $C$ . Según Marx la magnitud de valor de una unidad de  $C$  está dada por la siguiente fórmula:

$$W := c + v + s, \quad (1.1)$$

donde  $c$ , y  $v$  son el capital unitario constante y variable respectivamente, y  $s$  es la plusvalía unitaria generada por el trabajador. En términos ricardianos  $c$  sería el trabajo muerto o pretérito y  $v + s$  el trabajo vivo o presente. Por capital constante y variable nos referimos a la magnitud de valor de los medios de producción y de los bienes de consumo del trabajador, consumidos para producir una unidad de  $C$  respectivamente. Ahora si durante un año se producen  $N$  unidades de  $C$ , su valor anual será de  $W_a = Nc + Nv + Ns$ , donde  $Nc$  y  $Nv$  son el capital constante y variable consumidos anualmente, y  $Ns$  es la plusvalía anual producida. La magnitud de valor es una "magnitud económica" cuya medida se expresa mediante un número natural 1, 2, ..., y una unidad de medida, el tiempo, que puede ser la hora, el día, la semana, o el año. Por otro lado por precio de un valor de uso o mercancía entendemos la expresión de su magnitud de valor en dinero, por ejemplo en oro, o como dice Marx (2008: 124): " El precio es la denominación dineraria del trabajo objetivado en la mercancía " (124). En fin si la magnitud de valor esta expresada en una moneda, por ejemplo, la libra £, entonces hablamos de precio monetario de  $C$ , y podemos decir, siguiendo Marx: "supongamos que un trabajador en doce horas produzca un valor de 12£".

La determinación de la magnitud de valor a través del tiempo de trabajo está, por lo tanto, "oculto bajo los movimientos manifiestos que afectan a los valores relativos de las mercancías" (Marx 2008: 92). A partir de ahora cuando digamos, sin otra especificación, *valor* nos referiremos a la magnitud de valor, y cuando digamos *precio* nos referimos al precio monetario. No debemos

---

<sup>10</sup> Del alemán *werth* que significa valor.

confundir el término "precio" con el término "precio de producción"<sup>11</sup>. La tasa de plusvalía (unitaria) es la relación entre la plusvalía  $s$  y el capital variable  $v$  (o sea el cociente entre trabajo no remunerado y el trabajo remunerado):

$$s' := s/v \quad (1.2)$$

Esta relación se verá nuevamente a través de la expresión (5.2). (5.2) es homogénea de grado cero<sup>12</sup>, la tasa de plusvalía anual es la misma que la unitaria. La plusvalía  $s$  y la tasa de plusvalía  $s'$  son esencialmente "invisibles y desconocidas en el modo de producción capitalista". Dado que para el capitalista no hay diferencia entre capital constante  $c$  y variable  $v$ , él ve a (1.1) de la siguiente forma:

$$W := k + p, \quad (1.3)$$

donde  $k := c + v$  es lo que Marx llama precio de costo de la mercancía  $C$ , y  $p$  es la ganancia (unitaria) producida. A partir de (1.1) y (1.3) se deduce que la plusvalía  $s$  y la ganancia  $p$  coinciden "la ganancia es, sin embargo, una forma convertida de plusvalía, una forma en la cual su origen y el secreto de su existencia son un misterio". Se podría decir que "la ganancia es la forma en que la plusvalía se presenta en la superficie de la sociedad capitalista". El capitalista considera que el precio de costo  $k$  es el valor real de la mercancía y la ganancia  $p$  es la consecuencia de venderla por encima de su valor. La tasa de ganancia  $p'$  es la relación entre la ganancia  $p$  y la suma del capital constante empleado  $c$ , y no solo consumido, y del capital variable  $v$ , es decir está definida por la siguiente formula:

$$p' := \frac{p}{\hat{c} + v} \quad (1.4)$$

El capital constante empleado  $\hat{c}$  podemos escribirlo como

$$\hat{c} = \hat{c}^f + c^c, \quad (1.5)$$

donde  $\hat{c}^f$  es el capital fijo empleado para producir una unidad de  $C$ , es decir el valor de los instrumentos de trabajo empleados, como maquinarias, edificios, ...,  $c^f$  es la depreciación del capital constante fijo en la producción de una unidad de  $C$ , es decir el valor de los instrumentos de trabajo consumidos, y  $c^c$  es el capital constante circulante consumido, es decir el valor de los insumos para el trabajo, como elementos auxiliares, materias primas y artículos intermedios que

---

<sup>11</sup> Como veremos más adelante el precio de producción es otra "magnitud económica", cuya unidad de medida supondremos que es también la libra £.

<sup>12</sup> En general decimos que una función  $f$  es homogénea de grado  $n=0,1,\dots$ , si  $f(\alpha x)=\alpha^n f(x)$ .

se consumen en un uso y consecuentemente sus valores son transferidos completamente al producto por la acción del trabajador. Si suponemos que el tiempo de rotación del capital fijo  $\tilde{c}^f$  es de  $\tilde{T}$  años, y que  $T$  años es el tiempo para producir una unidad del valor de uso  $C$ , sigue que la relación entre  $c^f$  y  $\tilde{c}^f$  está dada por la siguiente formula:

$$c^f = \frac{T}{\tilde{T}} \tilde{c}^f, \quad (1.6)$$

con  $\tilde{T} \geq T$ . Dado que  $p = s$ , reemplazando  $s = s' \times v$ , y usando (1.5) y (1.6), obtenemos:

$$p' = \frac{s}{\tilde{c} + v} = s' \times \frac{v}{\tilde{c} + v} = \frac{s'}{d + 1}, \quad (1.7)$$

donde la magnitud escalar

$$\begin{aligned} d &:= \tilde{c}/v = \frac{\tilde{c}^f + c^c}{v} \\ &= \frac{\frac{\tilde{T}}{T} c^f + c^c}{v} \end{aligned}$$

es definida por Marx como la composición orgánica<sup>13</sup> (unitaria) de capital, y  $\hat{c} = \tilde{c}^f + c^c$  es el capital constante empleado. Observamos que a diferencia de la tasa unitaria de plusvalía  $s'$  que, siendo homogénea de grado cero, es igual a la tasa de plusvalía anual, la tasa de ganancia unitaria  $p'$  es diferente en general de la tasa de ganancia anual. En este último caso

$$p'_a := \frac{Np}{\tilde{c}_a + Nv} = \frac{s'}{d_a + 1},$$

donde  $d_a := \hat{c}_a/Nv$ , y  $\hat{c}_a := \tilde{c}^f + Nc^c$  es la composición orgánica anual de capital. La ganancia unitaria  $p$  se escribe entonces como

$$p = p'(\hat{c} + v).$$

---

<sup>13</sup> Este texto no se meterá en el debate de las diferentes formas de expresar la composición orgánica del capital.

Observamos en fin que (1.1) se reescribe como

$$W := c^f + c^c + v + s \quad (1.8)$$

Consideramos ahora a la economía capitalista con  $m$  esferas de producción<sup>14</sup>,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ . Para  $i=1, \dots, m$ , y usamos también la misma letra  $i$  para indicar la mercancía producida por la misma esfera. Sin perder de generalidad asumamos que cada esfera produzca uno y sólo un tipo de mercancía (es decir omitimos la producción conjunta). Suponemos además que la masa de mercancías de una misma esfera está producida en las mismas condiciones sociales, de manera que el valor individual, el valor de mercado y el precio de mercado sean lo mismo. Entonces, desde (1.8), el valor  $W_i$  unitario de la mercancía  $i$ , al finalizar la producción en la esfera  $i$  está dado por la siguiente fórmula:

$$W_i := c_i + v_i + s_i \quad (1.9)$$

donde aca y en lo que sigue

$$c_i := c_i^f + c_i^c,$$

Descomponiendo  $c_i$  en la depreciación del del capital fijo de la esfera  $i$  y el capital constante circulante consumido por la esfera  $i$ , para la producción de una unidad de  $C$ ,  $v_i$  es el capital variable unitario y  $s_i$  la plusvalía unitaria, o desde (1.3),

$$W_i := k_i + p_i,$$

Donde  $k_i$  es el precio de costo unitario y puede descomponerse en la suma de la depreciación del del capital fijo de la esfera  $i$ , el capital constante circulante consumido por la esfera  $i$  y el capital variable consumido en la misma esfera respectivamente y  $p_i$  es la ganancia unitaria. Desde (1.4), la tasa de ganancia  $p_i'$  de la esfera  $i$  esta dada por la siguiente formula:

$$p_i' = \frac{s'}{d_i + 1}, \quad (1.10)$$

donde  $s' := s_i/v_i$  es la tasa de plusvalía, que Marx supone igual para todas las esferas  $i$  y  $d_i := c_i/v_i$  es la composición orgánica de capital de la esfera  $i$ , donde

---

<sup>14</sup> En lo que sigue usamos indistintamente el termino esfera o rama de producción.

$$\tilde{c}_i := \tilde{c}_i^f + c_i^c = \frac{\tilde{T}_i}{T_i} c_i^f + c_i^c, \quad (1.11)$$

y  $\tilde{T}_i$  es el periodo rotación del capital fijo empleado  $c_i^f$ , y  $T_i$  es el tiempo para producir una unidad de  $i$ . Las tasas de ganancia  $p_i$ , con composiciones orgánicas de capital  $d_i$  diferentes, difieren entre esferas.

Dado que "[...] la diferencia entre las tasas medias de ganancia para los diversos ramos de la industria no existe ni podría existir sin abolir todo el sistema de la producción capitalista. Por tanto, pareciera que la teoría del valor resulta incompatible, en este caso, con el movimiento real, incompatible con los fenómenos efectivos de la producción, [...]" (Marx 2009: 193-194). Como dice Marx (2009: 199): "[...] las tasas de ganancia que imperan en los diversos ramos de la producción son originariamente muy diferentes. Esas diferentes tasas de ganancia resultan niveladas por la competencia en una tasa general de ganancia, que constituye el promedio de todas esas diferentes tasas de ganancia. La ganancia que con arreglo a esta tasa general de ganancia, corresponde a un capital de magnitud dada, cualquiera que sea su composición orgánica, se denomina la ganancia media." Marx (2009: 199-200) muestra con algunos ejemplos numéricos como capitales de la misma magnitud y de la misma composición orgánica, con diferentes periodos de rotación, pueden producir tasas de ganancia diferentes. *Por el momento, haremos abstracción de la diferencia que la diversidad de tiempos de rotación puede determinar al respecto.* Marx introduce un algoritmo que transforma los valores en precios de producción, de manera que cada esfera tenga la misma tasa de ganancia. El valor unitario  $W_i$  en (1.18) se transforma en precio de producción unitario  $P_i$  según la formula

$$P_i := c_i + v_i + \pi(\hat{c}_i + v_i), \quad (1.12)$$

donde el capital constante empleado  $\hat{c}_i$  está dado por (1.18), y la magnitud escalar  $\pi$ , que Marx llama la tasa general de ganancia unitaria, está dada por la siguiente fórmula:

$$\pi := \frac{\sum_{j=1}^m s_j}{\sum_{j=1}^m (\tilde{c}_j + v_j)}.$$

Ahora si definimos la ganancia promedio unitaria  $\pi_i$  por

$$\pi_i := \pi (\hat{c}_i + v_i).$$

Diferentes ramas producen ganancias iguales con capitales  $\hat{c}_i + v_i$  de la misma magnitud. Marx (2009: 207-208) está perfectamente conciente que en (1.19) las magnitudes  $c_i$ ,  $v_i$ , y  $\hat{c}_i$  no se transforman: "En virtud del desarrollo que acabamos de efectuar, se ha producido una

modificación con respecto a la determinación del precio de costo de las mercancías. Originariamente suponíamos que el precio de costo de una mercancía era igual al valor de las mercancías consumidas en su producción. Pero para el comprador, el precio de producción de una mercancía es el precio de costo de la misma, y por lo tanto puede entrar como precio de costo en la formación del precio de otra mercancía. Puesto que el precio de producción puede divergir del valor de la mercancía, también el precio de costo de una mercancía, en el cual se halla comprendido este precio de producción de otra mercancía, puede hallarse por encima o por debajo de la parte de su valor global formado por el valor de los medios de producción que entran en ella... Sin embargo siempre conserva su validez el principio de que el precio de costo de las mercancías es siempre menor que su valor.” Esto significa que en todas las fórmulas precedentes la depreciación del capital fijo  $c_{i}^{f}$ , el capital constante circulante  $c_{i}^{c}$  y el capital variable  $v_i$  consumidos son en precio de producción  $c_{P_i}^f$ ,  $c_{P_i}^c$ , y  $v_{P_i}$  respectivamente. Así la (1.18) se reescribe correctamente como

$$W_i := cp_i + vp_i + s_i \quad (1.13)$$

donde

$$c_{P_i} := c_{P_i}^f + c_{P_i}^c,$$

y la (1.19) como

$$P_i := cp_i + vp_i + \pi(\hat{c}p_i + vp_i), \quad (1.14)$$

donde

$$\pi := \frac{\sum_{j=1}^m s_j}{\sum_{j=1}^m (\tilde{c}_{P_j} + v_{P_j})}, \quad (1.15)$$

es la tasa general de ganancia, y

$$\pi_i := \pi (\hat{c}p_j + vp_j), \quad (1.16)$$

es la ganancia promedio unitaria, con

$$\hat{c}p_j := T_i N_i \{c_{P_i}^f + c_{P_i}^c\}.$$

En particular la (1.14) puede ser escrita como:

$$P_i := k_i + \pi_i,$$

es decir que el precio de producción unitario  $P_i$  de la mercancía  $i$  es igual a su precio de costo unitario  $k_i := cp_i + vp_i$  más la ganancia promedio  $\pi_i$  dada por (1.16), o que "El precio de una mercancía, que es igual a su precio de costo más la parte de la ganancia media anual que le corresponde, según la relación de sus condiciones de rotación, sobre el capital empleado para producirla (no sólo sobre el capital consumido para producirla), es su precio de producción." (Marx 2009: 198) y sigue "Su supuesto es la existencia de una tasa general de ganancia, y ésta, a su vez, presupone que las tasas de ganancia, tomadas aisladamente en cada esfera particular de la producción, ya estén reducidas a igual número de tasas medias. Estas tasas particulares de ganancia son  $= pv/C$  en cada esfera de la producción, y tal como ocurriera en la sección primera de este libro, deben ser desarrolladas a partir del valor de la mercancía. Sin ese desarrollo, la tasa general de ganancia (y por ende también el precio de producción de la mercancía) es una idea carente de sentido y absurda." (Marx 2009: 198-199) En particular ver la proposición 3.1 en la sección 3 donde se prueba la siguiente fórmula por la tasa general de ganancia

$$\pi = \sum_{j=1}^m \gamma_j P_j',$$

siendo  $\gamma_{\{j\}} \in (0,1)$ , donde  $p_{\{j\}}'$  está dado por la (1.10). Hay dos pasos más en el libro III de *El Capital* donde Marx explica la razón de la invariancia del precio de costo  $k_i$  en (1.14). El primero es el siguiente (ver [], p. 109): "Bajo el modo de producción capitalista los elementos del capital productivo son, por regla, comprados en el mercado, y por esa razón sus precios incluyen el beneficio de lo que se ha realizado, por lo tanto, incluyen el precio de producción de la rama respectiva de producción junto con el beneficio contenido en él". Algunas páginas después el sigue ([], p. 141): "Supongamos que la composición del capital promedio es  $80c+20v$ . Ahora es posible que en los capitales reales de esta composición  $80c$  pueda ser mayor o menor que el valor de  $c$ , es decir, el capital constante, porque esta  $c$  puede estar compuesta por productos cuyo precio de producción difiere de su valor. De la misma manera,  $20v$  podría diferir de su valor si el consumo del salario incluye productos cuyo precio de producción se desvía de su valor".

De hecho las fórmulas (1.13) y (1.14) hay que interpretarlas recordando que el proceso de reproducción para Marx (Marx 2008a: 29) es una secuencia temporal de fases alternantes de producción y circulación: " El proceso cíclico[1] del capital se desenvuelve en tres fases, que, como se expuso en el primer tomo, se suceden con arreglo a esta secuencia: Primera fase: El

capitalista aparece como comprador en el mercado de mercancías y en el mercado de trabajo; su dinero se convierte en mercancía o efectúa el acto de circulación D - M. Segunda fase: Consumo productivo, por parte del capitalista, de las mercancías adquiridas. Actúa como productor capitalista de mercancías; su capital recorre el proceso de producción. El resultado es: mercancía de valor superior al de sus elementos de producción. Tercera fase: El capitalista retorna como vendedor al mercado, su mercancía se cambia por dinero o efectúa el acto de circulación M-D." Este ciclo está descrito por la siguiente fórmula:

$$M - - - C \xrightarrow{L_{MP}} \dots P \dots C' - - - M'$$

La fórmula de transformación de Marx en el caso de evolución en tiempo discreto es la que se expresa luego de este párrafo. Para  $t \in \mathbb{N}$ , asumamos que en cada esfera  $i$  el intervalo temporal del proceso de producción sea unitario, y lo denotamos por  $(t, t+1)$ , y que el capital fijo es consumido por entero y es remplazado totalmente. Dado que suponemos, para simplificar el argumento sin perder de generalidad, que el periodo de circulación sea igual a cero, tenemos que el instante  $t+1$  puede indicar sea el instante final del proceso de producción empezado al instante  $t$ , sea el instante en el cual se realiza el proceso de circulación, y sea el inicio de un nuevo proceso de producción  $(t+1, t+2)$ . El valor  $W_i(t+1)$  de una unidad de la mercancía  $i$  al instante  $t+1$ , es decir al final del proceso de producción que empezó al instante  $t$ , está dado por:

$$W_i(t+1) = cp_i(t) + vp_i(t) + s_i(t+1), \quad (1.17)$$

donde  $c_{P_i}(t) := c_{P_i}^f(t) + c_{P_i}^c(t)$ , y  $v_{P_i}(t)$  son el capital constante y variable en precio de producción respectivamente, consumidos en el intervalo de producción  $(t, t+1)$ , y comprados por el capitalista al mercado en el instante  $t$ , y  $s_i(t+1)$  es la plusvalía generada por el trabajador durante el mismo intervalo de tiempo. Según Marx, en la siguiente fase de circulación, en el instante  $t+1$ , el valor  $W_i(t+1)$  se transforma en su precio de producción

$$P_i(t+1) = cp_i(t) + vp_i(t) + \pi_i(t+1)(\hat{c}p_i(t) + vp_i(t)),$$

donde la tasa general de ganancia está dada por

$$\pi(t+1) = \frac{\sum_{j=1}^m s_j(t+1)}{\sum_{j=1}^m (\hat{c}p_j(t) + vp_j(t))},$$

y la ganancia promedio de la esfera  $i$  está dada por

$$\pi_i(t+1) = \pi(t+1) (\hat{c}p_i(t) + vp_i(t)),$$

con  $\hat{c}p_i(t) := T_i N_i c_{P_{i'}^f}(t) + c_{P_{i'}^c}(t)$ .

La (1.14) ha sido criticada sucesivamente por von Bortkiewicz como incompleta. Si para Marx el precio de costo  $k_i := cp_i + vp_i$  en (1.14) ya está en términos de precio de producción, y solo la plusvalía  $s_i$  debe transformarse en ganancia promedio  $\pi_i$ , para von Bortkiewicz, al contrario, el precio de costo está en términos de valor, y el mismo también debe transformarse, junto con la plusvalía, en términos de precio de producción. A diferencia de Marx, que considera un número  $m \geq 2$  de esferas de producción, von Bortkiewicz reagrupa las diversas ramas en tres departamentos  $i'=I, II$ , y  $i'=III$ , donde el primer departamento I produce medios de producción, el segundo II bienes de consumo para el trabajador y/o el capitalista, y el tercero III bienes de lujo para el capitalista, donde por artículos de lujo nos referimos a todos los productos que no sirven para la reproducción de la fuerza de trabajo. Según von Bortkiewicz entonces el valor

$$W_i^{vB} = c_{i'} + v_{i'} + s_{i'}, \quad (1.18)$$

donde  $c_{i'} := c_{P_{i'}^f} + c_{P_{i'}^c}$ , se transforma en precio de producción  $P_{i'}^{vB}$  de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$P_{i'}^{vB} := c_{P_{i'}^{vB}} + v_{P_{i'}^{vB}} + \pi^{vB} (c_{P_{i'}^{vB}} + v_{P_{i'}^{vB}}), \quad (1.19)$$

donde  $\pi^{vB}$  es la tasa general de ganancia,  $c_{P_{i'}^{vB}} := c_{P_{i'}^{vB}}^f + c_{P_{i'}^{vB}}^c$ , y  $v_{P_{i'}^{vB}}$  son el capital constante y variable consumidos en términos de precios de producción respectivamente, y  $c_{P_{i'}^{vB}} := ((T_{i'}) / (T_{i'})) c_{P_{i'}^f} + c_{P_{i'}^c}$  es el precio de producción del capital constante empleado y no solo consumido. La expresión  $a^{vB}$  significa que la magnitud  $a$  está definida en el sentido de von Bortkiewicz. Observamos que, a diferencia de (1.14), donde  $cp_i$  y  $vp_i$  son dados, en (1.19)  $\pi^{vB}$ ,  $c_{P_{i'}^f}$ ,  $c_{P_{i'}^c}$ , y  $v_{P_{i'}^{vB}}$  son incógnitas simultáneas.

Asumimos que la diferencia entre (1.14) y (1.16) se da como consecuencia de una interpretación diferente sobre el proceso de reproducción. Como ya dijimos, para Marx el proceso de reproducción es una secuencia temporal de fases alternantes de producción y circulación que se entrecruzan entre ellas y para von Bortkiewicz, al contrario, el proceso de reproducción se reduce a la sola fase de circulación, donde se fijan instantáneamente y post festum el valor de los medios de producción y de consumo. Pero sería entonces, en el segundo caso, como que en el proceso de producción ingresan medios de producción y de consumo sin valor.

Para terminar con este apartado enunciamos los principales resultados de este artículo. Para  $P_i = \alpha_i W_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , para  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ , en (1.14), podemos calcular los coeficientes de transformación  $\alpha_i$  de valores en precios de producción en la fórmula de transformación de Marx. De manera similar, para calcular los coeficientes de transformación  $\alpha_{i'}^{vB}$ ,  $i'=I, II$ , y  $\alpha_{III}^{vB}$  en la fórmula de transformación de von Bortkiewicz, ponemos  $P_{i'}^{vB} = \alpha_{i'}^{vB} W_{i'}^{vB}$ , en (1.19), y asumiendo, como hace von Bortkiewicz, la siguiente hipótesis de "linealidad"

$$c_{P_i^{vB}} = \alpha_1^{vB} c_i, \quad \tilde{c}_{P_i^{vB}} = \alpha_1^{vB} \tilde{c}_i, \quad v_{P_i^{vB}} = \alpha_{II}^{vB} v_i, \quad (1.20)$$

entre el precio de producción  $c_{P_i^{vB}}$  y el valor  $c_i$  del capital constante consumido, entre el precio de producción  $c_{P_i^{vB}}$  y el valor  $c_i$  del capital constante empleado, y entre el precio de producción  $v_{P_i^{vB}}$  y el valor  $v_i$  del capital variable, obtenemos el siguiente sistema para las incógnitas  $\pi^{vB}$ ,  $\alpha^{vB}$ :

$$\begin{cases} \alpha_1^{vB} = \alpha_1^{vB} \frac{c_i}{W_1^{vB}} + (1 + \pi^{vB}) \alpha_{II}^{vB} \frac{v_i}{W_1^{vB}} + \pi^{vB} \alpha_1^{vB} \frac{\tilde{c}_i}{W_1^{vB}}, \\ \alpha_{II}^{vB} = \alpha_1^{vB} \frac{c_{II}}{W_{II}^{vB}} + (1 + \pi^{vB}) \alpha_{II}^{vB} \frac{v_{II}}{W_{II}^{vB}} + \pi^{vB} \alpha_1^{vB} \frac{\tilde{c}_{II}}{W_{II}^{vB}}, \\ \alpha_{III}^{vB} = \alpha_1^{vB} \frac{c_{III}}{W_{III}^{vB}} + (1 + \pi^{vB}) \alpha_{II}^{vB} \frac{v_{III}}{W_{III}^{vB}} + \pi^{vB} \alpha_1^{vB} \frac{\tilde{c}_{III}}{W_{III}^{vB}}, \end{cases} \quad (1.21)$$

donde  $c_{i'} := ((T_{i'}) / (T_{i'})) c_{i'}^f + c_{i'}^c$ . Dado que las dos primeras ecuaciones son independientes de la tercera, escribiendo  $c_{i'} = c_{i'} - c_{i'} + c_{i'}$ , para  $i' = I, II$ , podemos escribirlas en la siguiente forma:

$$\begin{cases} \alpha_1^{vB} = (1 + \pi^{vB}) (\alpha_1^{vB} \frac{c_i}{W_1^{vB}} + \alpha_{II}^{vB} \frac{v_i}{W_1^{vB}}) + \pi^{vB} \alpha_1^{vB} \frac{\tilde{c}_i - c_i}{W_1^{vB}}, \\ \alpha_{II}^{vB} = (1 + \pi^{vB}) (\alpha_1^{vB} \frac{c_{II}}{W_{II}^{vB}} + \alpha_{II}^{vB} \frac{v_{II}}{W_{II}^{vB}}) + \pi^{vB} \alpha_1^{vB} \frac{\tilde{c}_{II} - c_{II}}{W_{II}^{vB}}, \end{cases}$$

o en forma vectorial

$$\alpha^{vB} = (1 + \pi^{vB}) \alpha^{vB} T^{vB} + \pi^{vB} \alpha^{vB} V^{vB}, \quad (1.22)$$

donde  $\alpha^{vB} = (\alpha_I^{vB}, \alpha_{II}^{vB})$ ,  $T^{vB}$  es la siguiente matriz de transformación  $2 \times 2$ :

$$T^{vB} = \begin{bmatrix} \frac{c_i}{W_1^{vB}} & \frac{c_{II}}{W_{II}^{vB}} \\ \frac{v_i}{W_1^{vB}} & \frac{v_{II}}{W_{II}^{vB}} \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

$$V^{vB} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{c}_i - c_i}{W_1^{vB}} & \frac{\tilde{c}_{II} - c_{II}}{W_{II}^{vB}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

respectivamente

$I_2$  es la matriz identidad  $2 \times 2$ . Presentamos también un vector fila  $v = [v_1 \cdots v_N]$  lo identificaremos con un punto de  $R^N$ , de coordenadas  $v = (v_1, \dots, v_N)$ . Observamos que en el caso particular donde en los primeros dos departamentos el capital constante empleado  $\hat{c}_i$  coincide con el capital constante consumido  $c_i$ , es decir que  $\hat{c}_i = c_i$  para  $i' = I, II$ , entonces la matriz  $V^{vB}$  es la matriz cero, y (1.22) se reduce a un problema de autovalor para la matriz  $T^{vB}$ , es decir

$$\alpha^{vB} T^{vB} = (1 + \pi^{vB})^{-1} \alpha^{vB}. \quad (1.25)$$

Anteriormente observamos que von Bortkiewicz no distingue entre capital constante consumido y empleado, entonces viendo (1.22) como un problema de autovalor, y poniendo  $\alpha_{III}^{vB}=1$  en (1.21) ( $z=1$  en la fórmula (13) en [1]), llega a tener un sistema sobre determinado (ver formulas (19), (20), (21) en [1]). Aquí, al contrario, estudiamos directamente el problema (1.22) y probamos la existencia y unicidad de un autovalor  $\lambda^{vB} := (1+\pi^{vB})^{-1}$  positivo, tal que el autovector correspondiente  $\alpha^{vB}$  sea positivo.

Observamos que si, por ejemplo, el capital constante  $c_i := W_{I}^{vB} a_{i'}$ , para un cierto  $a_{i'} \in \mathbb{R}^+$ , es decir que el capital constante es una función lineal de  $W_{I}^{vB}$ , y en consecuencia  $c_{P_{i'}^{vB}} := P_{I}^{vB} a_{i'}$ , entonces (1.20) es verificada (suponemos que  $v_{P_{i'}^{vB}} = \alpha_{II}^{vB} v_{i'}$ ), y (1.19) se reduce a (1.22). Por otra parte si, por ejemplo,

$$c_{i'} := W_{I}^{vB^2} a_{i'},$$

es decir que el capital constante  $c_i$  es una función cuadrática de  $W_{I}^{vB}$ , y  $c_{P_{i'}^{vB}} := P_{I}^{vB^2} a_{i'}$ , entonces

$$c_{P_{i'}^{vB}} = \alpha_{I}^{vB^2} c_{i'},$$

las identidades (1.20) no son verificadas, y (1.19) no se reduce a (1.22).

Además, probamos que  $P_i = W_i$  en el caso de la transformación de Marx, si y solo si la composición orgánica del capital  $d_i = c_i/v_i$  es la misma para  $i=1, \dots, m$  esferas, y análogamente probamos que  $P_{i'}^{vB} = W_{i'}^{vB}$ , en la fórmula de von Bortkiewicz, bajo la misma hipótesis, es decir que  $d_{i'}^{vB} := c_{i'}/v_{i'}$  es la misma para  $i'=I, II, III$ . De otra forma para  $m \geq 4$  esferas de producción, y así poder generalizar la formula de von Bortkiewicz (1.19), introducimos los coeficientes tecnológicos, siguiendo el enfoque de Morishima [1973??]. Pero entonces los coeficientes de la matriz de transformación de Morishima  $T^M$  en (5.1) no son todos positivos, y no se puede usar el teorema de Perron y Frobenius para probar la existencia y unicidad de un autovalor  $\lambda^M := (1+\pi^M)^{-1}$  positivo de  $T^M$  tal que, el autovector correspondiente  $\alpha^M = (\alpha_1^M, \dots, \alpha_m^M)$  sea positivo. En consecuencia la generalización de la fórmula de von Bortkiewicz mediante los coeficientes tecnológicos no está bien formulada.

## Breve introducción sobre la teoría del valor en Marx

En los Libros I y II del Capital Marx estudia la forma en la cual se produce el valor de una mercancía. En particular, en el Libro I analiza el proceso de producción en sí mismo para una unidad de capital, sin competencia entre los diferentes capitales. En el libro II se ocupa de la circulación... En el Libro III Marx aplica los principios del Libro I sobre la mercancía individual, a la masa de mercancías que se encuentran en el mercado y que constituyen el producto de las diversas esferas de producción.

Para Marx los valores de uso se convierten en mercancías solo porque son productos de trabajos ejecutados independientemente producido para otros. "Para producir una mercancía, no sólo debe producir valor de uso, sino valores de uso para otros, valores de uso sociales. {nota de F. E. --Y no sólo, en rigor, para otros. El campesino medieval producía para el señor feudal el trigo del tributo, y para el cura el del diezmo. Pero ni el trigo del tributo ni el del diezmo se convertían en mercancías por el hecho de ser producidos para otros. Para transformarse en mercancía, el producto ha de transferirse a través del intercambio a quien se sirve de él como valor de uso.}" (Marx 2008: 50). El efecto global de estas tareas privadas es el trabajo social total.

El descubrimiento científico tardío de que los productos del trabajo, como valores, son solo expresiones de la cristalización del trabajo humano utilizado por su producción, hace época en la historia del desarrollo de la humanidad, pero no disipa la apariencia de que el carácter social del trabajo pertenece a los objetos. Por lo tanto, tan pronto como nos refugiamos en otras formas de producción, todo el misticismo del mundo de las mercancías desaparece inmediatamente.

"Las mercancías vienen al mundo revistiendo la forma de valores de uso o cuerpos de mercancías: hierro, lienzo, trigo, etc. Es ésta su prosaica forma natural. Sin embargo, sólo son mercancías debido a su dualidad, a que son objetos de uso y, simultáneamente, portadoras de valor. Sólo se presentan como mercancías, por ende, o sólo poseen la forma de mercancías, en la medida en que tienen una forma doble: la forma natural y la forma de valor." (Marx 2008: 58)

De 1.7 se deduce que en general la tasa de ganancia ( $p'$ ) es inferior a la tasa de plusvalía ( $s'$ ), es decir

$$p' < s',$$

a excepción del caso  $s'=0$ , es decir del caso que no hay explotación, como en la producción mercantil simple, y/o del caso  $c=0$ , por los cuales tenemos que  $p'=s'$ .

Lo que excede del valor de la mercancía a su precio de costo se crea en el proceso inmediato de producción y se realiza solo en el proceso de circulación. Tal excedencia asume entonces la apariencia de ser extraída del proceso de circulación en cuanto en un mercado real, en el marco de la competencia, "[...] depende de las condiciones del mercado el que ese excedente se realice o no, y en qué grado. [...] el tiempo de circulación y el tiempo de trabajo entrecruzan sus

trayectorias, y de ese modo pareciera que ambos por igual determinan el plusvalor [...]” (Marx 2009: 50-51). Los dos procesos, el inmediato de producción y el de circulación, están constantemente entrelazados y, por lo tanto, distorsionan constantemente sus signos característicos distintivos.

Dado que un tipo de mercancía en la misma esfera de producción puede ser producida en diferentes condiciones sociales, Marx muestra (Marx 2009: 219-251) como el valor individual de la misma se transforma en su valor de mercado y como a su vez la demanda o la "necesidad social" transforma el valor de mercado en su precio de mercado.

Lo que hemos considerado como cambios que ocurren sucesivamente con un mismo capital ahora se deben considerar como diferencias simultáneas entre las inversiones de capital existentes una junto a la otra en diferentes esferas de producción. Aplicando los principios del Libro I sobre la mercancía individual, al cúmulo de mercancías que están en el mercado y que constituyen el producto de toda una esfera de producción, será necesario hacer una distinción entre el valor de mercado y el valor individual de las mercancías que son producidas por los diferentes productores en la misma esfera de producción (Marx 2009: 221). El valor de mercado en sí mismo constituye el centro de oscilación de los precios de mercado que son los mismos para los bienes en la misma esfera. Además, la competencia de los capitales en las distintas ramas de producción crea el precio de producción, que a su vez nivela las tasas de ganancia entre las diferentes esferas. (Marx 2009: 225-226) El valor de mercado debe considerarse, por una parte, como el valor medio de los bienes producidos en una determinada esfera, por otra, como el valor individual de los bienes que se producen en las condiciones medias de su esfera de producción respectiva y que constituyen la gran masa de sus productos.

Aquello que la competencia logra en primer lugar en una esfera de producción es componer los diversos valores individuales de las mercancías en un valor de mercado único y en un precio de mercado único.

Supongamos que la mayoría de los bienes considerados se producen aproximadamente en las mismas condiciones sociales, y por lo tanto tiene un valor igual al valor individual de las mercancías individuales que componen esta masa. Supongamos que se produce a una tasa relativamente insignificante a continuación se produce a otra tasa por encima de estas condiciones, que consecuentemente el valor individual de la primera es más alto y el de la segunda es menor que el valor promedio de la mayoría de las mercancías, pero que estos dos extremos se compensan de tal manera que el valor promedio es igual al valor de las mercancías que pertenecen a la masa intermedia; entonces el valor de mercado está determinado por el valor de los bienes producidos en las condiciones intermedias. (Marx 2009: 231)

“Sólo en coyunturas extraordinarias las mercancías producidas bajo las peores condiciones o bajo las condiciones más privilegiadas regulan el valor de mercado, el cual, por su parte, constituye el centro de oscilación para los precios de mercado, éstos, sin embargo, son los mismos para las mercancías del mismo tipo.” (Marx 2009: 226)

“Supongamos, en cambio, que la cantidad global de las mercancías de que se trate llevadas al mercado siga siendo la misma, pero que el valor de las mercancías producidas bajo las condiciones peores no se compense con el valor de las producidas bajo las mejores condiciones, de modo que la porción producida bajo las condiciones peores constituya una magnitud relativamente significativa, tanto respecto a la masa intermedia como al otro extremo: en ese caso, la masa producida bajo las condiciones peores regula el valor de mercado o el valor social.” (Marx 2009: 231)

“Supongamos, por último, que la masa de mercancías producida bajo mejores condiciones que las medias supere significativamente a la producida bajo las condiciones peores, constituyendo ella misma una magnitud significativa en comparación con la producida bajo condiciones medias, entonces la parte producida bajo las condiciones mejores regulará el valor de mercado.” (Marx 2009: 231-232)

“El valor medio, calculado por adición de las sumas de los valores de ambos extremos y del estrato medio, [...]” (Marx 2009: 233). Al determinar los factores que regulan el valor de mercado, se supone que la masa de las mercancías producidas permanece sin cambios y que solo varía la proporción entre los elementos de esta masa que se producen en diferentes condiciones (Marx 2009: 234).

Supongamos que esta masa de bienes representa la oferta ordinaria. Ahora, si la demanda correspondiente a esta masa de bienes representa la demanda ordinaria, los bienes se venderán a su valor de mercado (228). Si, en cambio, la cantidad es menor o mayor que la demanda, habrá una diferencia entre el precio de mercado y el valor de mercado. Y precisamente cuando es más bajo, es siempre la mercancía producida en las condiciones menos favorables la que determina el precio de mercado, mientras que cuando es más alto ocurre el caso contrario: en ambos casos los bienes producidos siempre están en uno de los extremos que determinan el precio. precio de mercado, aunque la proporción simple de las masas producidas en diferentes condiciones debería conducir a otro resultado.

Debido a que el precio de mercado de bienes idénticos, cada uno producido en circunstancias individuales ligeramente diferentes, corresponde al valor de mercado, es necesario que la presión que los diversos vendedores ejercen entre sí sea lo suficientemente fuerte como para que la masa de bienes sea lanzada al mercado. requerido por las necesidades sociales, es decir, la masa por la cual la empresa puede pagar el valor de mercado. Si la masa de los productos excede esta necesidad, los productos deben venderse por debajo de su valor de mercado; Inversamente, si la masa de los productos no fuera suficiente, los bienes se venderían por encima de su valor de mercado. (224)

Si el valor del mercado cae, resulta en una extensión en general de la necesidad social, eso es lo que regula la demanda social ... Si el valor del mercado aumenta, la necesidad social de contratos de bienes y, en consecuencia, se absorbe una cantidad menor.

Se nota aquí que por Marx la "necesidad social" regula el principio de demanda a partir de la relaciones entre las diferentes clases sociales con respecto a su posición económica relativa, es decir, depende principalmente de la relación entre la plusvalía total y el salario, y segundo, de la relación entre las diferentes partes en las que se descompone la plusvalía (ganancia, renta de la tierra, impuestos), y que la relación entre la demanda y la oferta no puede explicar nada hasta que se vislumbre la base en la que se funda esta relación, es decir la ley del valor (224).

Por lo tanto, si la oferta y la demanda regulan el mercado o más extensamente las diferencias entre precio de mercado y valor de mercado, el valor de mercado regula la relación entre demanda y oferta, es decir, determina el punto alrededor del cual los factores de oferta y demanda hacen oscilar el precio de mercado. (224)

Si determinada mercancía se ha producido con una cantidad mayor que la requerida, en cuyo caso la masa de bienes representa en el mercado una cantidad de trabajo social mucho menor que la que contiene en realidad. En consecuencia, estos bienes deben venderse por debajo de su valor de mercado (231)

Lo opuesto ocurre cuando la masa de trabajo social es menor que la extensión de tiempo necesaria socialmente para el producto en particular.

El intercambio o venta de la mercancía a su valor constituye la ley racional, natural de su equilibrio; es sobre ella que uno debe basarse para explicar las excepciones, y no las excepciones para explicar la ley misma (231).

La verdadera dificultad consiste en determinar qué debe entenderse por el equilibrio entre la oferta y la demanda. Cuando la oferta y la demanda están equilibradas, ya no pueden explicar ningún fenómeno, no ejercen ninguna influencia sobre el valor de mercado y nos dejan completamente oculto por qué el valor de mercado se expresa en esta suma de dinero en lugar de en otro (231).

Las leyes intrínsecas de la producción capitalista no pueden explicarse sobre la base de la acción recíproca de la oferta y la demanda porque estas leyes se manifiestan en su forma pura solo cuando la demanda y la oferta dejan de actuar, es decir, están equilibradas. En realidad, la demanda y la oferta nunca se equilibran o si se equilibran, esto ocurre solo por casualidad, de modo que el fenómeno no tiene valor científico y debe considerarse inexistente. La relación entre la oferta y la demanda explica, por lo tanto, solo las diferencias entre los precios de mercado y los valores de mercado. (233)

## Bibliografía

- Astarita, Rolando (2011). Valor trabajo, el problema de la transformación y crítica sraffiana. Disponible en: <https://rolandoastarita.wordpress.com/2011/07/07/valor-trabajo-el-problema-de-la-transformacion-y-critica-sraffiana/>
- Bortkiewicz, Ladislaus von (1907), "Zur Berichtigung der grundlegenden theoretischen Konstruktion von Marx im 3. Band des Kapital", en *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik* 34. Traducido al inglés en "On the Correction of Marx's Fundamental Theoretical Construction in the Third Volume of Capital" en *Karl Marx and the Close of His System*. Ed. por PM Sweezy, Kelley, New-York (EEUU) en 1949.
- Farina, Joaquín (2018). "La tasa de explotación como medida de desigualdad global. (1973-2012)". Tesis doctoral, Universidad Castilla La Mancha, Cuenca (España). Disponible en: <https://ruidera.uclm.es/xmlui/bitstream/handle/10578/18195/TESIS%20Farina.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Marx, Karl (1962) [1867]. El capital: crítica a la economía política Tomo I. Editorial nacional de Cuba, La Habana (Cuba).
- Marx, Karl (2008) [1867]. El capital: crítica de la economía política Tomo I Vol 1. Siglo XXI editores México DF (México).
- Marx, Karl (2009) [1894]. El capital: crítica de la economía política Tomo III Vol 6. Siglo XXI editores México DF (México)
- Marx, Karl (2008a) [1885]. El capital: crítica de la economía política Tomo II Vol 4. Siglo XXI editores México DF (México)
- Marx, Karl (1968). Salario, precio y ganancia. Ricardo Aguilera Editor, Madrid (España).
- Marx, Karl (1963) [1894]. El capital: crítica a la economía política Tomo III. Editorial nacional de Cuba, La Habana (Cuba).
- Marx, Karl (1991) [1857]. Introducción general a la crítica de la economía política. Siglo XXI Editores, Buenos Aires (Argentina).
- Marx, Karl (1975) [1857]. Contribución a la crítica de la economía política. Ediciones Estudio, Buenos Aires (Argentina).
- Marx, Karl (1974). Historia crítica de la teoría de la plusvalía. Tomo I. Ediciones Brumario, Buenos Aires (Argentina).
- Morishima, Michio (1973). *La teoría económica de Marx. Una teoría dual del valor y el crecimiento*. Edit. Tecnos, Barcelona (España).
- Morishima, Michio (1974). "The Fundamental Marxian Theorem: A Reply to Samuelson." en *Journal of Economic Literature*, Nº 12. American Economic Association, Nashville (EEUU).
- Ochoa, Edward (1984). "Labor values and prices of production: an interindustry study of the US economy, 1947–1972", Tesis doctoral, New School for Social Research, Nueva York (Estados Unidos)
- Ramos, Alejandro (1998-99). "Value and Price of Production: New Evidence on Marx's Transformation Procedure" en *International Journal of Political Economy*, 28:4.

Ramos, Alejandro (2007). *Crisis, valor y temporalismo en la teoría de Marx*. Departamento de Economía Aplicada V, Universidad Complutense, Madrid (España).

Ramos, Alejandro (2003). "El temporalismo de Marx y las revoluciones en el valor de las mercancías" en *Política y Sociedad*, Vol 40 Nº2. UCM, Madrid (España). Disponible en: <http://revistas.ucm.es/index.php/POSO/article/view/POSO0303110231A/23835>

Smolinski, Leon (1973). "Karl Marx and Mathematical Economics" en *Journal of Political Economy*, Vol. 81, Nº. 5 (Sep - Oct). The University of Chicago Press (EEUU). Disponible en: <http://www.jstor.org/stable/1830645>

Tugan-Baranowsky, Mikhael (1915). *Los fundamentos teóricos del marxismo*. Hijos de Reus editores, Madrid (España).

Tugan-Baranowsky, Mikhael (1901). "Studien zur Theorie und Geschichte der Handelskrisen in England" parcialmente traducido al inglés en: *Research in Political Economy*, vol. 18, 2000, pp. 43-110. State University of New York, Buffalo (EEUU).

Yaffe, David (1976). "Valor y Precio en El Capital de Marx" en *Revolutionary Communist Nº 1*, segunda edición. Disponible en: <https://www.marxists.org/espanol/tematica/econpol/yaffe/valoryprecio.htm>